Segundo Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación a Distancia
EduQ@ 2009

ESTRATEGIAS PARA INCORPORAR LA VISUALIZACIÓN A LAS CLASES DE CÁLCULO

Eje temático: Recursos para el aprendizaje y la investigación de calidad.

Autores:

- Patricia Garrido. Facultad Regional Mendoza- Universidad Tecnológica Nacional. Argentina.patrigarrido@yahoo.com.ar

- Adriana Schilardi. Facultad Regional Mendoza- Universidad Tecnológica Nacional. Argentina. aschilardi@frm.utn.edu.ar

Resumen

Es conocido, en el contexto de las investigaciones en enseñanza de la matemática, que cuando se enseña cálculo los temas son abordados desde un punto de vista netamente algebraico. Desatendiendo la comprensión de las ideas y los conceptos, que pueden orientar al alumno desde otros escenarios matemáticos. Esto no condice, con los objetivos propuestos en esta materia. Es decir, se establece qué se enseña con el fin de que el alumno desarrolle las capacidades intelectuales necesarias para resolver problemas. Y sin embargo se evade el problema, el contexto, y los registros de expresión, variables didácticas, que el docente emplea para lograr sus objetivos.

El propósito de este trabajo es presentar una reflexión respecto del impacto de las tics en educación. Para ello se analiza la visualización como una de las capacidades fundamentales para la adquisición de conceptos matemáticos; mejorando el proceso de enseñanza, a través del uso de simuladores empleados en materiales curriculares para educación a distancia. Esta mediación pedagógica incorporada a la educación presencial mejora y potencia el aprendizaje.

De esta manera se proponen estrategias didácticas, vinculadas a actividades, que involucran aspectos de la visualización mediante el uso de simuladores, con el propósito de lograr cambios conceptuales en los estudiantes.

Este trabajo se desarrolla en el marco del Subproyecto "Santaló". Puesta en funcionamiento del centro de investigación y educación matemática en ingeniería (CIEMI) para el mejoramiento de la formación matemática en el CGCB de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional.

Palabras claves: cálculo - visualización - aprendizaje – simuladores – registros.

INTRODUCCIÓN

En el aprendizaje del cálculo, en primer año de las carreras de Ingeniería, el estudiante se encuentra en una etapa cognitiva de transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado. "*Algunas características que diferencias ambas etapas es la complejidad y la frecuencia del uso de ciertos procesos como los de representación, traslación, abstracción y otros... En esta etapa se deberá abandonar los esquemas finitos para entrar en el mundo de lo infinito. Es por eso que se debe lograr esta transición de manera de favorecer la construcción de conceptos matemáticos*". (Garbin, 2005).
Cuando se enseña a los alumnos un concepto matemático, éste adquiere el status de objeto matemático; es decir, se les presenta como un ente abstracto. En matemática, la conceptualización o adquisición conceptual de un objeto matemático (noesis), debe necesariamente pasar por los distintos tipos de registros de representación semiótica.
"*Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación ….. Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento." (Duval, 1999, pag 14).*
Para Duval, el análisis de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas conduce a la hipótesis: "*no hay noesis sin semiosis*" (Duval, 1999, pag 16). Considera asimismo, que la comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación. Esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. Los alumnos deben aprender a realizar como una actividad necesaria, conversiones en distintos registros. La coordinación entre ellos es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Este cambio de registros no se realiza en forma espontánea, pues el pensamiento moviliza un solo registro de representación. Bajo esta perspectiva, una de las actividades fundamentales de los profesores es enfrentar a los alumnos con problemas. Así, para poder resolverlos, necesitan realizar conversiones entre distintos registros. Además, es necesario aclarar que el rol del docente es guiar a los estudiantes en función de los comportamientos que deseen provocar, proporcionándoles los medios adecuados para ello.

En la enseñanza tradicional del Análisis Matemático I el profesor se enfrenta con conceptos problemáticos en sí mismos. Esto hace que adopte una metodología puramente algorítmica en su enseñanza dado que es mucho más fácil de gestionar y evaluar.
La construcción de los conceptos matemáticos está, por lo tanto, estrechamente relacionada con la capacidad de representar un objeto matemático en más de un registro, de convertir una representación de un registro en otro (conversión), y de realizar transformaciones en el

interior de un mismo registro (tratamiento). La coordinación entre los distintos registros semióticos es fundamental en el proceso de comprensión. Cuando se privilegia algún registro semiótico en particular el aprendizaje permanece como mono-registro (por ejemplo, el algebraico, o el geométrico). Ciertamente, esto no excluye el desarrollo de algún tipo de comprensión en los alumnos la cual puede ser evaluada fácilmente y a corto término ser satisfactoria. Pero esta comprensión mono-registro representa un obstáculo mayor: en el momento en que la mayoría de los alumnos sale del contexto en el cual se realizó el aprendizaje, se muestran incapaces de movilizar los conocimientos adquiridos y por tanto aquello que ellos “saben”. De modo general una comprensión mono-registro es una comprensión que no permite ninguna transferencia. Sólo una comprensión integrativa, es decir, una comprensión basada en la coordinación de los registros, da esa posibilidad de transferencia. Entonces, la coordinación de los registros, se revela como necesaria en un aprendizaje específicamente centrado en la conversión de las representaciones; evitando su restricción a una simple actividad de tratamiento, como solemos hacer en todos los niveles

Según Artigue (1995) se ha comprobado que la enseñanza tradicional del Análisis tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica las cuales se evalúan sobre las competencias adquiridas en este dominio. De esta manera, los distintos temas que se desarrollan, dependen de las definiciones matemáticas de los objetos, perdiéndose el valor que tienen las conversiones entre registros para los aprendizajes, debido a que no se exploran de manera consistente las actividades que favorecen su articulación con otros medios de expresión y representación matemática que utilizan el uso simultáneo de varios registros de representación semiótica.

Para la Doctora Ismenia Guzmán (1998), en una investigación referida a la incidencia del enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica en el aprendizaje comenta: *“Para favorecer los aprendizajes y favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado. Plantear estos problemas es una tarea creativa para los profesores, pues este tipo de problemas, hasta ahora, son poco frecuentes en los textos escolares y en las clases de matemáticas. Aunque estos problemas parezcan fáciles a juicio de algunos profesores, la evidencia empírica demuestra otra cosa desde el punto de vista de los alumnos, como lo muestra nuestro estudio y algunos otros”.*

Para atender a esta problemática es necesario construir propuestas que posibiliten el mejoramiento del proceso de enseñanza incorporando en ellas distintos registros de representación. Pero esto sólo será posible con el apoyo del docente, como actor principal, para generar el cambio requerido, a partir de la reformulación de su quehacer matemático. Uno de los registros que se manejan en la enseñanza del análisis matemático es el gráfico, o representación de funciones a través de sus gráficas. Pero ¿la presencia de una gráfica en un texto o explicación de un tema implica saber mirarla? ¿es lo mismo ver que mirar?

Una actividad relacionada con los cambios de registros es la visualización. No debe confundirse ver con visualizar. La actividad de “ver” se refiere a la capacidad fisiológica, mientras que “visualizar” se asocia a un proceso cognitivo inherente al ser humano influenciado por el entorno cultural del sujeto. Esta habilidad se va aprendiendo y construyendo de manera cultural.

Cantoral y colaboradores (2000, p. 146), escriben que: "... se entiende por *visualización* la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico".

La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento", en una consecuencia de esto Vicente Carrión(1999), establece: "*Obsérvese que no se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema. Visualizar un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas".*

En matemática, visualizar requiere de la actividad de conversión, o sea convertir un registro semiótico de representación en otro. Actividad destacada como fundamental en el aprendizaje de las matemáticas para validar los enunciados matemáticos.

Por lo tanto para que se logre una conceptualización significativa, es inevitable la visualización. Esta habilidad debe ser incorporada, promovida y desarrollada en la formación de los estudiantes porque la matemática presenta gran cantidad de contenidos visuales. Se debe prestar atención explícita a las representaciones concretas para revelar las relaciones abstractas que luego se formalizan.

Las NTIC ofrecen interesantes posibilidades al superar las limitaciones del espacio y del tiempo, que suelen ser los eternos enemigos en educación, permitiendo la incorporación de la visualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el estudiante establece un estilo propio que le permite generar estrategias cognitivas de aprendizaje en nuevos espacios: "aulas virtuales".
Es por eso que los simuladores digitales son una herramienta importante para la visualización Un simulador reproduce un "proceso" y permite visualizar un procedimiento que forma un concepto, lo que es imposible de obtener de la sola lectura de un texto. También admite manipular variables que permiten reforzar un concepto. Las simulaciones son estrategias que permiten promover en los estudiantes el desarrollo de modelos mentales sobre situaciones complejas y también realizar un uso activo de estrategias de resolución de problemas. El uso de estos simuladores permite descubrir, comprender, reflexionar sobre conocimientos puestos en juego en una situación problemática. Además apoyan el aprendizaje constructivo, relacionando lo nuevo con conceptos ya adquiridos, permitiendo generar la actividad de plantear hipótesis.

Aún no se desarrollan cambios significativos en el proceso de enseñanza, que apunten a favorecer experiencias de este tipo. Pero es de vital importancia formar o desarrollar la habilidad de visualizar en los estudiantes, con el fin de atribuir sentido a las representaciones gráficas. Es decir, los alumnos aprenden así cómo y qué mirar de un gráfico.

La propuesta pedagógica

En esta propuesta se presentan los aspectos fundamentales de una estrategia didáctica que tiene como objetivo formar el concepto de “límite matemático”. Este proceso tiene como actividad principal la utilización de simuladores programados en lenguaje Java usando el núcleo interactivo para programas educativos desarrollado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España en su proyecto “Descartes”. Estos simuladores fueron modificados para cumplir con los objetivos específicos del tema a abordar, dado que son de libre uso educativo.

El desarrollo que se muestra permite abordar el concepto de límite, límites laterales y continuidad a través de la visualización con el propósito de ampliar sus significados empleando para ello los recursos de los cambios de registros.
Se propone como metodología que el alumno interactúe con los simuladores para:

- Facilitar la conceptualización de límite, límite lateral y función continua.

- Desarrollar el pensamiento reflexivo que le permita diferenciar los distintos tipos de límites.

- Diferenciar el valor de f(a) - valor de la función en el punto- del $\underset{x \to a}{lím} f(x)$ -valor obtenido a partir del cálculo del límite de la función en el punto-.

- Interpretar gráficamente la definición algebraica de límite, atendiendo al valor de ∂ -amplitud del entorno reducido en el que puede moverse la variable **x** cuando se aproxima al valor del punto de estudio para hallar el límite- y el valor de ε-amplitud del entorno simétrico para aproximarse al límite de la función-.

- Utilizar elementos visuales concretos con el fin de explorar conceptos abstractos como “tiende a…” , “no está definido en…” , “tiende a infinito” ,

Actividades

1) Se presenta en la pantalla (fig.1). Con el siguiente enunciado:

   En la siguiente animación está representada la función y las coordenadas de algunos puntos. En la parte inferior hay un botón que te permitirá cambiar las coordenadas de **x**. Partiendo del inicio de la escena, pulsa el botón para acercar el valor de **x** a 3. Podrás observar qué sucede con el correspondiente valor de la ordenada para cada valor de **x**. ¿A qué valor se acerca la ordenada cuando nos acercamos por derecha a x=3?

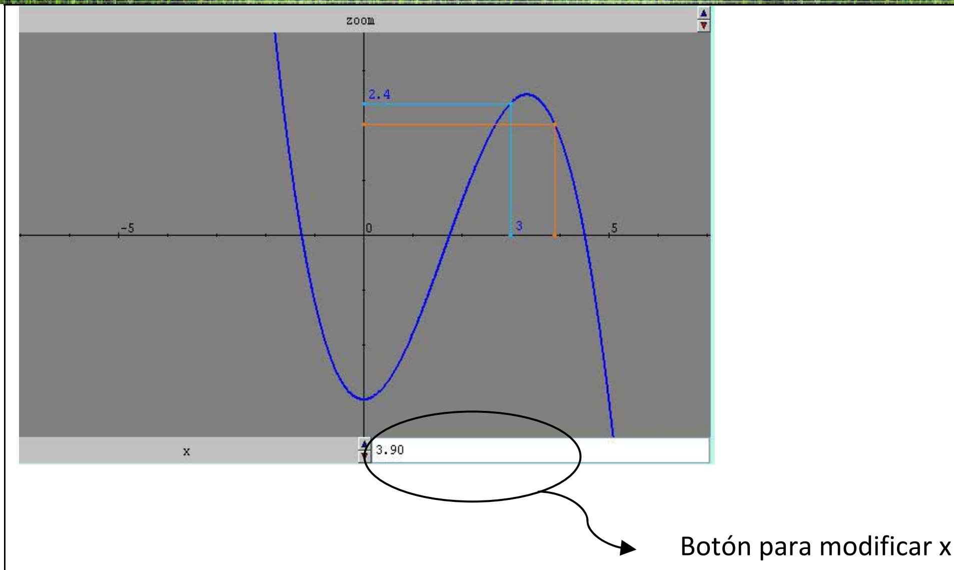

Figura 1. Simulación de límite por derecha

Esta actividad, que el alumno puede repetir las veces que lo requiera, le permitirá visualizar la tendencia de la función cuando **x** se acerca o tiende a 3.
Sin un componente visual del problema, tal vez resultaría más complicado alcanzar la representación algebraica. El ambiente dinámico-geométrico permitió acceder a imágenes mentales, una construcción anticipada en la mente, observar cuáles son los elementos estáticos y cuáles las variables. La manipulación del punto a lo largo de la función fue de mucho beneficio para el estudiante, pues permitió ver a qué valor se acercaba la función f(x) cuando **x** se acercaba al valor "3".

Otra actividad que puede utilizar el alumno para visualizar la gráfica que representa la definición formal de límite es la siguiente (fig.2). En ella se puede analizar el comportamiento del valor de f(x) en el entorno E(L, ε) para valores de **x** que pertenecen al entorno reducido E'(a, ∂) manipulando con el botón los valores de **x**.

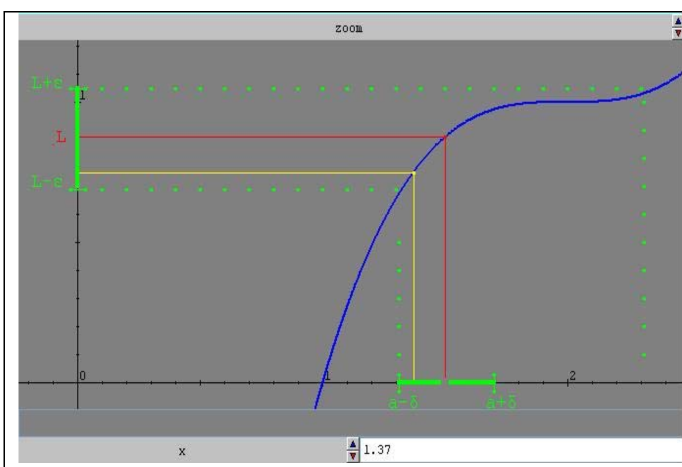

Figura2. Visualización de la gráfica de la definición de límite

A continuación, se propone la formalización de lo observado en la simulación. Se plantea que cuando **x** se encuentra a una distancia menor que ∂ de **a,** f(x) se encuentra a una distancia menor que ε de **L**. Acá el estudiante debe reflexionar acerca de lo que observa en la simulación cuando varía la abscisa de **x,** dentro del intervalo $(a-\partial;a+\partial)$, y lo que sucede con f(x). Esto contribuye a la comprensión y fijación del concepto de límites por izquierda y por derecha, denominados límites laterales. Se puede considerar acá que al manipular el alumno estas variables, se involucra con el concepto desde un punto de vista dinámico. Este dinamismo que se logra con el simulador, es imposible de mostrar en la clase tradicional, que utiliza como únicos recurso la tiza y el pizarrón, y donde el docente intenta estoicamente despertar la imaginación de sus alumnos.

Conclusiones

El trabajo en el aula virtual con el uso de simuladores permite reorganizar el discurso educativo para lograr una significativa apropiación de conceptos. Esta propuesta se centra en el concepto de límite, dentro del Análisis Matemático I, pero puede extenderse a otros conceptos. La actividad basada en la visualización dinamiza el trabajo personal del alumno y enriquece su razonamiento matemático; llevándolo a descubrir que los distintos registros de expresión se emplean, por ejemplo, en diferentes momentos del análisis de un problema, facilitando su compresión. Y esto allana el camino del docente; al permitir que los estudiantes, dispongan de otros escenarios matemáticos, y a partir de allí refuercen la formalización de conceptos.

No cabe duda que los entornos virtuales, abren nuevos caminos en educación, y más aún en el campo de las matemáticas. El uso de los simuladores favorece la manipulación de la información matemática, presentada visualmente, de manera más eficiente que el gráfico observado en un texto o apunte. Sin embargo, se requiere del apoyo incondicional, por parte del docente, para lograr la implementación exitosa de la propuesta.

Finalmente, cualquiera sea la modalidad educativa utilizada y, las condiciones en que se desarrolle la actividad, siempre es posible emprender acciones que permitan mejorar los logros y evitar algunos de los riesgos que comprometen los aprendizajes de los alumnos. La clave está pues, en reflexionar, sin disimulo, sobre las dificultades y buscar caminos para superarlas.

Bibliografía

- CARRIÓN MIRANDA, Vicente (1999): Álgebra de funciones mediante el proceso de visualización, Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

- DOLORES, C y otros. (2007). Matemática educativa. Algunos aspectos de la sociepistemología y la visualización en el aula. México.

- DUVAL, R.(1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Colombia.

- GARBIN, Sabrina (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito?. La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime. Vol 8. Número 2. México.

- GUZMAN, Ismenia (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes". Relime (Revista oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa). Vol 1, Número 1. México.

CURRICULUM DE AUTORES

ESPECIALISTA en Docencia Universitaria. **PROFESORA** de Matemáticas, Física y Cosmografía.

- Ayudante ordinario, en la cátedra de Análisis Mamático I de la Universidad Tecnológica Nacional – FRM

- Miembro del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza en Ingeniería (PROMEI) a través del subproyecto "Santaló" en un cargo asignado a través Módulos Equivalentes Simples (MES)- Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Mendoza.

- Docente Investigador, Categoría “F”, en la rama de Actividad Investigación Científica. Categorización otorgada por la Universidad Tecnológica Nacional-FRM

- Docente, Tutora y Contenidista en Educación a Distancia, de la Universidad Tecnológica Nacional-FRM y otras.

- Docente del Nivel Terciario, en las cátedras de: Matemática, Cálculo Financiero, Didáctica de la Matemática y Física IV, del Instituto Superior Técnico de Estudios Económicos de Cuyo- (ISTEEC)

SCHILARDI, ADRIANA

MAGISTER en Enseñanza de la Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática. **ESPECIALISTA** en Docencia Universitaria. **PROFESORA** de Matemáticas, física y Cosmografía.

- Profesora Adjunta efectiva con dedicación exclusiva en la cátedra ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ANÁLISIS MATEMÁTICO I de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional.

- Docente investigador categorizado participante del proyecto ” Red Investigación Educativa en Matemática Experimental para Ingeniería y Tecnología, RIEMEIT” y del Subproyecto de CGCB: “Santaló” Puesta en funcionamiento del Centro de Investigación y Educación Matemática en Ingeniería (CIEMI) para el mejoramiento de la Formación Matemática en el Ciclo General de Conocimientos Básicos de la Facultad Regional Mendoza- UTN.